

## Olimpiada Națională de Matematică Etapa locală - 7 februarie 2025

### Clasa a VIII-a - Enunțuri

1. Se consideră numerele  $a = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+1}$  și  $b = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}-1}$

- a) Arătați că  $a \cdot b \in \mathbb{Q}$  și  $a+b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
b) Demonstrați că  $a$  și  $b$  sunt iraționale.

*Gazeta Matematică 2024, supliment*

2. a) Determinați  $n \in \mathbb{N}$  știind că numărul  $\sqrt{n^2+5n+2}$  este natural.  
b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $[4x^2-4x] = -1$ , unde  $[a]$  înseamnă partea întreagă a lui  $a$ .

3. Fie cubul  $ABCD A'B'C'D'$ ,  $E$  mijlocul segmentului  $AB$  și  $F$  centrul feței  $ADD'A'$ .  
a) Arătați că  $BD' \parallel (A'ED)$ .  
b) Demonstrați că  $C'F \perp (A'ED)$ .

4. a) Demonstrați că  $\frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1+\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{2}$ , pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ .  
b) Determinați  $n \in \mathbb{N}^*$ , astfel ca  $\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{4}}{1+\sqrt{4}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} = \frac{17+\sqrt{3}}{2}$ .

*G.M.B. nr. 6-7-8/2024*

### NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.